3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?

Jeśli oznaczymy przez x prędkość samolotu, a przez y prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi x i y. Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania: $x = 550$ km/h i $y = 50$ km/h.

Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.

Uczeń:
- podaje pary liczb spełniające równanie liniowe z dwiema niewiadomymi,
- sprawdza, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań,
- dopisuje drugie równanie tak, aby dana para liczb spełniała dany układ równań,
- zapisuje podane informacje w postaci układu równań.

3.1. Co to jest układ równań

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 4{,}75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y, rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety dwu- i pięciozłotowe. Ile monet dwu-, a ile pięciozłotowych wrzucono, jeśli w skarbonce znajduje się 26 zł?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych: x – liczba monet dwuzłotowych, y – liczba monet pięciozłotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety dwuzłotowe i 4 monety pięciozłotowe.

Ćwiczenie 1

Resztę 2 zł 10 gr wydano w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek?

Ćwiczenie 1

x – liczba 10-groszówek,
y – liczba 50-groszówek.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 50y = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Było sześć 10-groszówek.

Multiteka
- Układ równań – rozwiązanie zadania
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Generator testów i sprawdzianów

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa równania jednocześnie rozpatrywane, opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

A. Podstawiamy do równań układu $x = 1$ i $y = 2$.

$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 \end{cases}$ Spełnione pierwsze równanie. Drugie równanie nie jest spełnione.

Zatem para $x = 1$, $y = 2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x = -2$ i $y = 6$.

$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 \end{cases}$ Spełnione pierwsze równanie. Spełnione drugie równanie.

Zatem para $x = -2$, $y = 6$ spełnia podany układ równań.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ -\frac{1}{2}x + 3y = 7 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

Zadania

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

1. a), c), f) tak **b), d), e)** nie

Ćwiczenie 2

A. $\begin{cases} 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 0 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-6) + 3 \cdot 0 = 3 \neq 7 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-1{,}5) = -12 \neq -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-5) + 3 \cdot (-1{,}5) = -2 \neq 7 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 1{,}5 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-5) + 3 \cdot 1{,}5 = 7 \end{cases}$

Para liczb $x = -5$, $y = 1{,}5$ spełnia podany układ równań.

D. $\begin{cases} 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -18 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 11 \neq 7 \end{cases}$

2. Sprawdź, która z podanych par liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

a) $3x + 2y = 17$ b) $3x + 4y = 17$ c) $2x + 4y = 17$

4. Do danego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez podaną parę liczb.

a) $4x + 3y = 14$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

c) $4x - 9y = -1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $3x - 7y = 6$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

d) $12x + \frac{1}{2}y = -10$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases}$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Suma liczb x i y wynosi 5. Różnica tych liczb wynosi 2.

b) Liczba x jest o 8 większa od liczby y. Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x.

c) Liczba x jest trzykrotnie większa od liczby y. Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 10.

d) Liczba x jest o 3 mniejsza od liczby y. Różnica liczb x i y jest dwa razy większa od liczby y.

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba a stanowi 40% liczby b. Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b, to otrzymamy 4.

b) Suma liczb a i b jest równa 14. Gdy do 120% liczby a dodamy 70% liczby b, to otrzymamy sumę a i b.

c) Liczba o 10% mniejsza od liczby a jest o 10% większa od liczby b. Różnica liczby o 15% większej od a i liczby o 15% mniejszej od b wynosi 1.

7. Dla jakich wartości parametrów m i n rozwiązaniem układu równań jest podana para liczb?

a) $\begin{cases} mx + 2y = 39 \\ -8x + ny = -34 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - my = 5 \\ nx - 10y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

2. C

3. a) $(1,7)$, $(3,4)$, $(5,1)$
b) $(3,2)$
c) Nie ma takich liczb.

4. a) np. $x + y = 3$
b) np. $y - x = 2$
c) np. $4x + 3y = 3$
d) np. $2x + y = -9$

5. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y + 8 = x \\ 5y = x \end{cases}$
c) $\begin{cases} x = 3y \\ \frac{x+y}{2} = 10 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + 3 = y \\ x - y = 2y \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} a = 0{,}4b \\ 0{,}2a + 0{,}6b = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a + b = 14 \\ 1{,}2a + 0{,}7b = a + b \end{cases}$
c) $\begin{cases} 0{,}9a = 1{,}1b \\ 1{,}15a - 0{,}85b = 1 \end{cases}$

7. a) $m = 7$, $n = 3$
b) $m = 4$, $n = 6$

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Uczeń:
- rozwiązuje układ równań metodą podstawiania,
- określa typ układu równań (czy dany układ równań jest układem oznaczonym, nieoznaczonym, czy sprzecznym),
- dopisuje drugie równanie tak, aby układ równań był układem oznaczonym, nieoznaczonym lub sprzecznym.

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Drugie równanie przepisujemy bez zmian.

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y+5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian. Podstawiamy wyrażenie $3y + 5$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą y.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 \ / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość y do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą x.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu równań.

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

Spełnione pierwsze równanie.
Spełnione drugie równanie.

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

Multiteka
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Generator testów i sprawdzianów

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases}$

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$ Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Podstawiamy wyrażenie $x + 2$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą x.

$\begin{cases} 7x = 0 \ / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases}$ Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do drugiego równania.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Ćwiczenie 1

a) $\begin{cases} x = 12 - 2y \\ 12 - 2y - 3y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3x - 20 \\ 2x - (3x - 20) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 19 \\ y = 37 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3 - 3y \\ 3 - 3y - 2y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 20 - 2x \\ x - 3(20 - 2x) = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 5x + 3(2x - 7) = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 5x + 11 \\ -7x + 2(5x + 11) = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x+2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \ / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y + 3 = 2(x+1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 \ / : 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x + y + 1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb. (Jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Ćwiczenie 2

a) $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5y \\ 5y + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x - (3 - 2x) = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ x - 2(2x + 6) = -15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - y - y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 11 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 9x + 3y \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x \\ x + 2(-x) = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x + y = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x - 4 \\ 3x + 2(-x - 4) = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 \end{cases}$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Podstawiamy wyrażenie $3 + 2y$ w miejsce x w drugim równaniu.

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases}$ Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną wartość niewiadomej y.

Zatem **żadna para liczb nie spełnia danego układu równań**.

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Np. układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x, y, których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci. Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$\begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Podstawiamy wyrażenie $3x - 6$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$\begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 0x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Równanie $0x = 0$ (możemy je również zapisać $0 = 0$) jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość wstawimy w miejsce niewiadomej x. Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.

Równanie $y = 3x - 6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**, np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = -4{,}5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0{,}2x + 0{,}1y = -0{,}1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = 0{,}7 \\ x + 4y = 5{,}3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}3y = -2 \\ 1{,}6x + 1{,}5y = 46 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4(3x - 0{,}5) - 5(y + 0{,}5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2{,}5) = -9y + 5{,}5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0{,}5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1{,}5) = 13{,}5 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

a) $\begin{cases} x = 12 - 2y \\ 0y = 0 \end{cases}$

Układ nieoznaczony

b) $\begin{cases} x = 3 - 3y \\ 3 - 3y - 3y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Układ oznaczony

c) $\begin{cases} x = 7 - 3y \\ 2(7 - 3y) + 6y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 - 3y \\ 0y = -10 \end{cases}$

Układ sprzeczny

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 2{,}2$, $y = 1{,}6$

b) $x = \frac{1}{7}$, $y = -\frac{2}{7}$

c) $x = 1$, $y = 0$

d) $x = 1{,}7$, $y = 0{,}9$

e) $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 2x - 2(-2x - 1) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - 3y = -20 \\ 16x + 15y = 460 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y - 5 \\ 16(\frac{3}{4}y - 5) + 15y = 460 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2{,}8 \\ y = -1{,}8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 29 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - y = -9 \\ 6x - 5y = -29 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 12x - 5y = 13{,}5 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 27 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases}$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma podany układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-3y) + 3(x-2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y+1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x-2y) - 2(y-x+1{,}5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0{,}3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 7(y-1) = -2\left(\frac{5}{2} + x\right) \\ -2(1-2x-y) = 1 - x - 5y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(1-x) - 5(2-y) = 5 \\ 0{,}2(2-3x) + y = 0{,}8 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x+2)^2 + 2y = x + 15 + (x-2)(x+2) \\ x + (y-1)^2 = 1 - (\sqrt{3} - y)(y + \sqrt{3}) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(1-2x) - y(1-y) = (y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y+3)(3-2y) \end{cases}$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y-2) = 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x-1) \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y-2) \end{cases}$

7. Dane jest równanie $3x - 4y = 2$. Dopisz do niego drugie równanie, tak by otrzymany układ równań był:

a) sprzeczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony.

8. Dla których wartości parametru $m \in \{-2, 0, 2\}$ układ jest oznaczony, dla których nieoznaczony, a dla których sprzeczny?

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + my = 3m \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ mx + 3y = 6 \end{cases}$
c) $\begin{cases} mx + 2y = 2 \\ 2x + my = -2 \end{cases}$

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

nie jest układem równań liniowych. Ma cztery rozwiązania, które są parami liczb całkowitych. Podaj te rozwiązania.

3. a) tak **b), c), d)** nie

4. a) 0 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 0

5. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases}$

6. a), c) nieoznaczony
b) sprzeczny

7. a) np. $6x - 1 = 8y$
b) np. $6x - 4 = 8y$
c) np. $3x - 8y = 2$

8. a) oznaczony dla $m = -2$ lub $m = 0$, nieoznaczony dla $m = 2$
b) oznaczony dla $m = -2$ lub $m = 0$, sprzeczny dla $m = 2$
c) nieoznaczony dla $m = -2$, oznaczony dla $m = 0$, sprzeczny dla $m = 2$

9. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ gdy:
$x - y = 0$ lub $x + y = 0$. Zatem $x = y$ lub $x = -y$.
Dla $x = y$ (i $x = -y$) mamy: $x^2 + y^2 = 2y^2 = 8$, czyli $y = 2$ lub $y = -2$.
Rozwiązania układu równań:

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Uczeń:
- rozwiązuje układ równań metodą przeciwnych współczynników,
- zapisuje rozwiązanie układu równań w przypadku, gdy jest to układ nieoznaczony.

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1). Aby zredukować taką niewiadomą, wystarczy dodać oba równania stronami – otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y.

$$+\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - x + 3y + 6y &= -4 + 13 \\ 9y &= 9 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Dodajemy równania stronami. Niewiadoma x została zredukowana.

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x + 3y = -4$. Otrzymujemy równoważny układ równań:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 1 w miejsce y w równaniu $x + 3y = -4$ i obliczamy niewiadomą x.

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 \end{cases}$$

Spełnione pierwsze równanie.
Spełnione drugie równanie.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases}$

Ćwiczenie 1

a) $+\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

$6x = 3$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$

b) $+\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

$4y = 4$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $+\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases}$

$-2y = 10$

$\begin{cases} x = -\frac{14}{5} \\ y = -5 \end{cases}$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

Generator testów i sprawdzianów

Czasami zanim dodamy równania stronami, musimy najpierw pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, by otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \ / \cdot (-4) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez -4.

$$+\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

$$5x - 8x = 6 - 12$$

Niewiadoma y została zredukowana.

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x:

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2.$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do równania $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.
Podstawiamy liczbę 2 w miejsce x w równaniu $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb $x = 2$, $y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = -3{,}5 \\ 3x - 2y = 4{,}5 \end{cases}$

Ćwiczenie 2

a) $+\begin{cases} -3x + 6y = -9 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}$

$$11y = -11$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) $+\begin{cases} -9x - 3y = 39 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

$$-7x = 35$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

c) $+\begin{cases} 8x - 14y = 6 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases}$

$$11x = 11$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$$

d) $+\begin{cases} 25x - 10y = 80 \\ 6x + 10y = -18 \end{cases}$

$$31x = 62$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

e) $+\begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -10x - 14y = 16 \end{cases}$

$$7y = 7$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

f) $+\begin{cases} 4x + 6y = -7 \\ 9x - 6y = 13{,}5 \end{cases}$

$$13x = 6{,}5$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 \ / \cdot (-2) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5, a drugiego przez -2.

$$+\begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases}$$

$$y = 2$$

Dodajemy równania stronami. Niewiadoma x została zredukowana.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 2 w miejsce y w drugim równaniu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 \ / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x = -2$, $y = 2$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 2y = 13 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

a) $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 17y = 4 \\ \frac{1}{3}x - 13y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases}$

Ćwiczenie 3

a) $+\begin{cases} 9x - 6y = 30 \\ 4x + 6y = -4 \end{cases}$

$13x = 26$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $+\begin{cases} -12x - 21y = -21 \\ 12x + 24y = 12 \end{cases}$

$3y = -9$

$\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $+\begin{cases} 12x + 4y = 26 \\ -12x + 21y = -6 \end{cases}$

$25y = 20$

$\begin{cases} x = 1{,}9 \\ y = 0{,}8 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

a) np. 5 i 3
b) np. 2 i 3
c) np. -5 i 6

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5(x-y)+5=2(2x+y) \\ 2(x-1)=y+1 \end{cases}$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x-5y+5=4x+2y \\ 2x-2=y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-7y=-5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

Niewiadome przenosimy na lewe strony równań, a wartości liczbowe – na prawe (pamiętamy przy tym o zmianie znaku). Następnie redukujemy wyrazy podobne.

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ 2(-5+7y)-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ -10+14y-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ 13y=13 \ / :13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7y \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+7 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x-7y=-5 \ / \cdot(-2) \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x+14y=10 \\ \quad 2x \quad -y=3 \end{cases}$$

$$13y=13 \ / :13$$

$$y=1$$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x-1=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:
- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \ / \cdot 3 \end{cases}$ Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

$$+\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 0x + 0y = 7 \quad}$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y, zatem układ równań jest sprzeczny.

Przykład 6

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \ / \cdot 3 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \ / \cdot 4 \end{cases}$ Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

$$+\begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 0x + 0y = 0 \quad}$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y. Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, które spełniają drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

a), c) Układ sprzeczny
b) Układ nieoznaczony

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** $x = 5,\ y = 3$
b) $x = 1,\ y = -3$
c) $x = 24{,}5,\ y = 18$
d) $x = 2,\ y = 0{,}5$
e) nieoznaczony: $y = -\frac{2}{3}x + 5,\ x \in \mathbf{R}$
f) sprzeczny

2. **a)** $x = -8,\ y = 4$
b) $x = -1,\ y = 1$
c) $x = -25,\ y = -5$
d) $x = 0,\ y = 5$
e) $x = -2,\ y = 5$
f) $x = 3,\ y = 5$

4. **a)** Układ nieoznaczony dla $m = 1$ i $n = 3$, sprzeczny dla $m = 1$ i $n = 1$
b) Układ nieoznaczony dla $m = 3$ i $n = 1$, sprzeczny dla $m = 3$ i $n = 3$

Ćwiczenie 5

Sprawdź metodą przeciwnych współczynników, czy układ równań jest nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0{,}4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y = 3{,}5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}2(x + 2y) - 0{,}3(2x - y) = 3{,}5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}01x - 0{,}01(y - 1) = -0{,}06 \\ 0{,}03x - 0{,}02(y - 2) = -0{,}12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}01(4x - y) = 0{,}01y + 0{,}02 \\ 0{,}6(y - x) = 0{,}1(y + 2x + 1) \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2{,}5}{5} = x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

4. Dla których wartości parametrów $m \in \{1, 3\}$ i $n \in \{1, 3\}$ układ jest nieoznaczony, a dla których – sprzeczny?

a) $\begin{cases} 3x - 18y = n \\ mx - 6y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 2mx - 1 \\ mx + y = -x + n \end{cases}$

3.

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 5x - y = -2{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{10}{9} \\ y = -\frac{55}{18} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 14x + 13y = -12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x - 3y = -8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases}$

Warto wiedzieć

Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

Niektóre zagadnienia wymagają wprowadzenia trzech lub więcej niewiadomych. Tworzy się wtedy i rozwiązuje układ tylu równań, ile niewiadomych zostało wprowadzonych.

1. Przeczytaj zamieszczony obok opis metody rozwiązywania układu trzech równań z trzema niewiadomymi, a następnie rozwiąż podany układ równań.

a) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y-z=20 \\ x-y-z=30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ x+2y+3z=1 \\ 5x-3y-z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-2y+3z=1 \\ 3x+4y-4z=-1 \end{cases}$

Rozwiązywanie układu trzech równań z trzema niewiadomymi

- Z jednego z równań wyznaczamy wybraną niewiadomą i podstawiamy otrzymane wyrażenie do obu pozostałych równań. Powstają w ten sposób dwa równania z dwiema niewiadomymi.
- Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi dowolną metodą.
- Obliczone wartości dwóch niewiadomych podstawiamy do dowolnego równania początkowego układu i obliczamy wartość trzeciej niewiadomej.

2. Czy podany układ równań spełnia trójka liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} x+2y-z=-4 \\ 2y+z=2 \\ 2y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y-z=-9 \\ 2y+3z=16 \\ 3y-z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+2y-z=10 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y-2z=-5 \\ x+2y+z=4 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases}$

3. a) Suma trzech liczb jest równa 36. Suma pierwszej i drugiej liczby jest dwukrotnie większa od trzeciej liczby, a suma drugiej i trzeciej jest o 10 większa od pierwszej liczby. Jakie to liczby?

b) Suma trzech liczb: a, b, c jest równa 27. Liczba c jest o 3 większa od średniej arytmetycznej liczb a i b, a liczba b o 3 mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a i c. Wyznacz liczby a, b i c.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x=20,\ y=-5,\ z=-5$
b) $x=2,\ y=1,\ z=-1$
c) $x=\frac{1}{11},\ y=-\frac{3}{22},\ z=\frac{2}{11}$

2. a) $x=2,\ y=-1,\ z=4$; tak
b) $x=-1,\ y=2,\ z=4$; tak
c) $x=2,\ y=1\frac{2}{5},\ z=-3\frac{1}{5}$; nie
d) $x=2,\ y=-1,\ z=4$; tak

3. a) $\begin{cases} x+y+z=36 \\ x+y=2z \\ y+z=x+10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=13 \\ y=11 \\ z=12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a+b+c=27 \\ \frac{a+b}{2}=c-3 \\ \frac{a+c}{2}=b+3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=9 \\ b=7 \\ c=11 \end{cases}$

Uczeń:
– układa i rozwiązuje układ równań do zadania z treścią.

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek, jeśli łącznie przewiozły one 132 tony piasku? Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:
x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,
y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.
Łączna masa przewiezionego piasku.

$$\begin{cases} x + y = 13 \ / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$+\begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

$$7x = 28$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań $x = 4$ i $y = 9$ (zauważ, że otrzymane liczby spełniają warunki zadania). Zatem pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna, a ile – druga ciężarówka?

Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Ćwiczenie 1

x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,
y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

$$\begin{cases} 6x + 10y = 460 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 40 \end{cases}$$

Pierwsza ciężarówka wykonała 10 kursów, a druga 40.

Ćwiczenie 2

a) x – ilość kupionych śliwek [kg],
y – ilość kupionych wiśni [kg].

$$\begin{cases} 6{,}5x + 8{,}5y = 31 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 2{,}5 \end{cases}$$

Gospodyni kupiła 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni.

b) x – ilość kupionej marchwi [kg],
y – ilość kupionych buraków [kg].

$$\begin{cases} 4x + 6y + 7{,}5 \cdot 2 = 49 \\ x + y + 2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kierownik stołówki kupił 1 kg marchwi i 5 kg buraków.

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:
d – wiek Doroty w latach, p – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Sprawdź, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Ćwiczenie 3

x – obecny wiek Tomka,
y – obecny wiek siostry Tomka.

$$\begin{cases} x - 4 = y \\ x + 2 + y + 2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 11 \end{cases}$$

Obecnie Tomek ma 15 lat, a jego siostra ma 11 lat.

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:
b – wiek Basi w latach, m – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

	Sześć lat temu	Obecnie	Za cztery lata
wiek Basi	$b - 6$	b	$b + 4$
wiek mamy Basi	$m - 6$	m	$m + 4$

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Sprawdź, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?

b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alek?

Zadania

1. Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?

2. Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?

3. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik, jeśli moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g?

4. Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?

5. Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2-, i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?

6. Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych, jeśli po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa?

1 dolar = 100 centów

Moneta 5-centowa

Moneta 10-centowa

Moneta 25-centowa

7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

Ćwiczenie 4

a) x – obecny wiek Darii,
y – obecny wiek Marii.

$$\begin{cases} 2(x-5) = y-5 \\ x+5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Obecnie Daria ma 10 lat, a Maria ma 15 lat.

b) x – obecny wiek Olka,
y – obecny wiek Alka.

$$\begin{cases} x+3 = 1{,}5(y+3) \\ x-9 = 2(y-9)+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 27 \\ y = 17 \end{cases}$$

Obecnie Olek ma 27 lat, a Alek ma 17 lat.

Odpowiedzi do zadań

1. x – obecny wiek ojca,
y – obecny wiek syna.

$$\begin{cases} x-9 = 6(y-9) \\ x+9+y+9 = 85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 51 \\ y = 16 \end{cases}$$

2. x – obecny wiek Ani i siostry,
y – obecny wiek brata Ani.

$$\begin{cases} 2(x-2)+y-2 = 45 \\ 2(x+3) = y+3+12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 21 \end{cases}$$

3. x – liczba monet 2-złotowych,
y – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} x+y = 30 \\ 5{,}21x + 6{,}54y = 169{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

4. x – liczba monet 1-złotowych,
y – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} 8+x+y = 20 \\ 2\cdot 8 + x + 5y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

5. x – liczba monet 1-złotowych,
y – liczba monet 2-złotowych,
z – liczba monet 5-złotowych.

$$\begin{cases} x+y+z = 32 \\ x+2y+5z = 100 \\ z = 2+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \\ z = 14 \end{cases}$$

6. x – liczba monet 5-centowych,
y – liczba monet 10-centowych.

$$\begin{cases} x+y+1 = 12 \\ 5x+10y+25 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

7. x – liczba monet 5-centowych,
y – liczba monet 10-centowych,
z – liczba monet 25-centowych.

$$\begin{cases} x+y+z = 29 \\ 5x+10y+25z = 400 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \\ z = 9 \end{cases}$$

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Oblicz pole tego prostokąta, jeśli jego obwód jest równy 36 cm.

9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego jego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to proporcja między długościami boków otrzymanego prostokąta wynosiłaby 1 : 3. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).

10. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano $\frac{3}{4}$ wszystkich miejsc. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych, jeśli wiadomo, że przychód ze sprzedaży biletów wyniósł 7000 zł?

11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?

12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?

13. Dana jest dwucyfrowa liczba A oraz liczba B uzyskana z przestawienia cyfr liczby A. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że ich suma wynosi 121, a liczba A jest o 7 większa od podwojonej liczby B.

14. Dana jest trzycyfrowa liczba A o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę B. Różnica liczb A i B wynosi 320, a suma liczb A i B jest równa 388. Jakie to liczby?

15. Liczba x powstaje z trzycyfrowej liczby y, mającej dwie cyfry takie same, przez zapisanie jej cyfr w odwrotnej kolejności. Różnica między liczbą x a y jest równa 396. Wyznacz te liczby, jeśli suma cyfr każdej z nich jest równa 16.

16. W pewnym spotkaniu brało udział 180 osób. Ustawiono dla nich łącznie 60 krzeseł i pewną liczbę trzyosobowych kanap. Niestety, nie dla wszystkich starczyło miejsc siedzących. Stosunek liczby osób stojących do siedzących był równy 1 : 4. Oblicz, ile kanap ustawiono.

8. x, y – długości boków prostokąta [cm].

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 2x + 2y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pole prostokąta:
$P = 5 \cdot 13 = 65$ [cm^2]

9. x, y – długości boków wyjściowego prostokąta [cm].

I przypadek

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ \frac{x+2}{y+6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 21 \end{cases}$$

II przypadek

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ \frac{x+6}{y+2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 25 \end{cases}$$

10. x – liczba biletów ulgowych, y – liczba biletów normalnych.

$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{4} \cdot 280 \\ 30x + 35y = 7000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 70 \\ y = 140 \end{cases}$$

11. x – cena bilet normalnego [zł], y – cena biletu ulgowego [zł].

$$\begin{cases} 50x + 22y = 654 \\ 70x + 42y = 994 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$$

12. x – cyfra dziesiątek wyjściowej liczby, y – cyfra jedności wyjściowej liczby.

$$\begin{cases} 10x + y - (10y + x) = 36 \\ 10x + y + 10y + x = 110 \end{cases}$$

Szukane liczby to: 73 i 37.

13. $$\begin{cases} A + B = 121 \\ A = 2B + 7 \end{cases}$$

$A = 83$, $B = 38$

14. $$\begin{cases} A - B = 320 \\ A + B = 388 \end{cases}$$

$A = 354$, $B = 34$

15. Liczby x i y mogą przyjąć jedną z 3 postaci:
$x = 100a + 10a + b$, wówczas $y = 100b + 10a + a$
$x = 100a + 10b + a$, wówczas $y = 100a + 10b + a$
$x = 100b + 10a + a$, wówczas $y = 100a + 10a + b$
Drugi przypadek odrzucamy, ponieważ $x = y$, czyli różnica $x - y \neq 396$.
Rozpatrujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} 2a + b = 16 \\ 110a + b - (100b + 11a) = 396 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 2a + b = 16 \\ 100b + 11a - (110a + b) = 396 \end{cases}$$

Tylko w drugim układzie rozwiązaniem są liczby całkowite: $a = 4$ i $b = 8$.

Zatem szukane liczby to: $x = 844$ i $y = 448$.

16. Ustawiono 28 kanap.

Uczeń:

– rozwiązuje zadania tekstowe dotyczące sytuacji praktycznych, w tym zadania dotyczące prędkości oraz wielkości podanych za pomocą procentów: stężeń roztworów i oprocentowania lokat bankowych.

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane do rozwiązywania zadań, w których występują wielkości podane procentowo, oraz zadań dotyczących prędkości.

Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy zmieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

> **Stężenie procentowe** roztworu określa, jaki procent masy całego roztworu stanowi masa rozpuszczonej substancji.
>
> Roztwór soli nazywany jest **solanką**.

Oznaczamy niewiadome:
x – masa w kg solanki 6-procentowej,
y – masa w kg solanki 2-procentowej.

Układamy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

$x + y = 100$

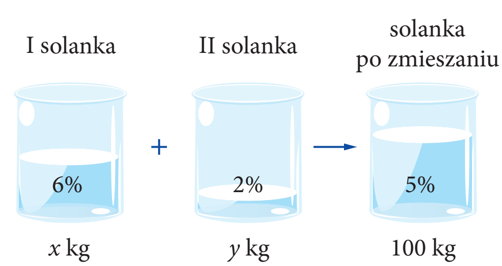
$0{,}06 \cdot x + 0{,}02 \cdot y = 0{,}05 \cdot 100$

Zapisujemy układ równań i go rozwiązujemy:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}06x + 0{,}02y = 5 \ / \cdot (-50) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2x &= -150 \ / : (-2) \\ x &= 75 \end{aligned}$$



Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu: $x = 75$ i $y = 25$. Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie: $25 + 75 = 100$ oraz $0{,}06 \cdot 75 + 0{,}02 \cdot 25 = 5$.

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy zmieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

Ćwiczenie 1

a) Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy zmieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?

b) Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 gramów roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

Ćwiczenie 1

a) x – masa solanki 13-procentowej [kg],
y – masa solanki 6-procentowej [kg].

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 0{,}13x + 0{,}06y = 0{,}09 \cdot 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$$

Aby otrzymać 35 kg solanki 9-procentowej, należy zmieszać 15 kg solanki 13-procentowej i 20 kg solanki 6-procentowej.

b) x – masa solanki 5-procentowej [g],
y – masa dosypanej soli [g].

$$\begin{cases} x + y = 95 \\ 0{,}05x + y = 0{,}06 \cdot 95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 94 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dosypano 1 gram soli.

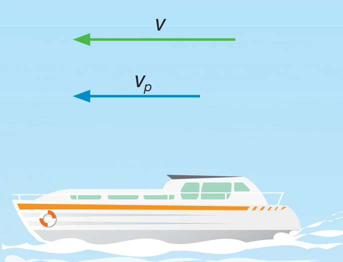
Łódź płynąca z prądem i pod prąd

Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

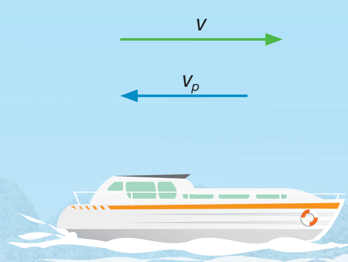
Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$

Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez v prędkość własną łodzi, a przez v_p prędkość prądu rzeki.



Prędkość łodzi poruszającej się z prądem rzeki jest równa $v + v_p$



Prędkość łodzi płynącej pod prąd jest równa $v - v_p$

Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną zaś w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Zakładamy, że wszystkie prędkości są stałe.
Oznaczamy przez v – prędkość własną łodzi, a przez v_p – prędkość prądu rzeki. Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

	Odległość	Prędkość	Czas
płynięcie z prądem	36 km	$v + v_p$	2 h
płynięcie pod prąd	36 km	$v - v_p$	3 h

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa $\frac{36 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 18$ km/h, a prędkość łodzi płynącej pod prąd $\frac{36 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 12$ km/h.

Otrzymujemy układ równań i rozwiązujemy go metodą przeciwnych współczynników:

$$+\begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases}$$

$$2v = 30$$

$$v = 15$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $2(15 + 3) = 36$, $3(15 - 3) = 36$.

Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki – 3 km/h.

Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Oblicz jej prędkość własną oraz prędkość prądu rzeki, jeśli droga powrotna łodzi trwała trzykrotnie dłużej.

Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd, przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem i 4 godziny pod prąd, przepłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Ćwiczenie 2

v – prędkość własna łodzi [km/h],
v_p – prędkość prądu rzeki [km/h].

$$\begin{cases} v + v_p = \frac{24}{2} \\ v - v_p = \frac{24}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 8 \\ v_p = 4 \end{cases}$$

Prędkość własna łodzi była równa 8 km/h, a prędkość prądu rzeki była równa 4 km/h.

Ćwiczenie 3

v – prędkość własna łodzi [km/h],
v_p – prędkość prądu rzeki [km/h].

$$\begin{cases} 58 = (v + v_p) \cdot 2 + (v - v_p) \cdot 3 \\ 82 = (v + v_p) \cdot 3 + (v - v_p) \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 12 \\ v_p = 2 \end{cases}$$

Prędkość własna łodzi była równa 12 km/h,
a prędkość prądu rzeki była równa 2 km/h.

Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?

2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?

3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A, a jaką do banku B? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:
x – kwota w zł wpłacona do banku A,
y – kwota w zł wpłacona do banku B.

$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 1{,}03x + 1{,}04y = 10\,340 \end{cases}$$

4. Kwotę 20 000 zł zainwestowano w dwie różne lokaty roczne oferowane przez bank X i bank Y. Lokata w banku X oprocentowana była 3,5% w skali roku. Oprocentowanie lokaty w banku Y było o 1 punkt procentowy wyższe. Po roku wypłacono z lokat 20 840 zł. Jaką kwotę złożono na lokacie w banku X, a jaką w banku Y?

Mosiądz to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.

5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?

6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli zaś użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

Odpowiedzi do zadań

1. x – liczba dziewcząt,
y – liczba chłopców.

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0{,}6x + 1{,}6y = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$$

W liceum uczy się 300 dziewcząt i 200 chłopców.

2. x – wypłata Bartka,
y – wypłata Pawła.

$$\begin{cases} y = 1{,}1x + 280 \\ x = 0{,}6y + 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1200 \\ y = 1600 \end{cases}$$

Bartek zarobił 1200 zł, a Paweł 1600 zł.

3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B

4. x – kwota wpłacona do banku X,
y – kwota wpłacona do banku Y.

$$\begin{cases} x + y = 20000 \\ 1{,}035x + 1{,}045y = 20840 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6000 \\ y = 14000 \end{cases}$$

Wpłacono 6000 zł do banku X i 14 000 zł do banku Y.

5. x – masa stopu 40% [kg],
y – masa stopu 80% [kg].

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0{,}4x + 0{,}8y = 0{,}5 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{cases}$$

Należy użyć 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%.

6. x – zawartość miedzi w pierwszym stopie,
y – zawartość miedzi w drugim stopie.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \cdot 0{,}55 \\ 3x + 5y = 8 \cdot 0{,}525 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}4 \\ y = 0{,}6 \end{cases}$$

Pierwszy stop zawiera 40% miedzi, a drugi 60%.

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaką odległość w tym czasie pokonał?

8. Z miast A i B wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami A i B?

9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?

10. Na pewne przedstawienie w teatrze sprzedano łącznie 500 biletów trzech rodzajów – normalnych po 50 zł, ulgowych po 40 zł i wejściówek po 30 zł. Biletów normalnych było o 40 więcej niż ulgowych i wejściówek razem. Wszystkie bilety kosztowały razem 22 300 zł. Ile biletów poszczególnych rodzajów sprzedano? Przeanalizuj przedstawiony poniżej początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:
x – liczba sprzedanych biletów normalnych,
y – liczba sprzedanych biletów ulgowych,
z – liczba sprzedanych wejściówek.

Możemy zatem ułożyć układ równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x = y + z + 40 \\ 50x + 40y + 30z = 22\,300 \end{cases}$$

11. Jedna ściana prostopadłościanu ma obwód równy 26 cm, druga – 28 cm, a trzecia – 34 cm. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

7. t_1 – czas jazdy po drogach asfaltowych [h],
t_2 – czas jazdy po drogach gruntowych [h].

$$\begin{cases} 90 = 20 \cdot t_1 + 15 \cdot t_2 \\ t_1 + t_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Roman jechał po drogach asfaltowych przez 3 h, w tym czasie pokonał 60 km.

8. s – odległość między miastami A i B [km],
v – prędkość wolniejszego pociągu [km/h],
$2v$ – prędkość szybszego pociągu [km/h].

$$\begin{cases} s = \frac{4}{3}v + \frac{4}{3} \cdot 2v \\ s = \frac{6}{5}(v + 10) + \frac{6}{5} \cdot 2v \end{cases}$$

$s = 120$ km

9. s_1 – długość pierwszego odcinka [km],
s_2 – długość drugiego odcinka [km].

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 120 \\ \frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{40} = 1\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 = 100 \\ s_2 = 20 \end{cases}$$

Długość drugiego odcinka wynosiła 20 km.

10. 270 biletów normalnych, 190 biletów ulgowych, 40 wejściówek

11. a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu [cm].

$$\begin{cases} 2a + 2b = 26 \\ 2a + 2c = 28 \\ 2b + 2c = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \\ c = 9 \end{cases}$$

Prostopadłościan ma krawędzie o długościach: 5 cm, 8 cm i 9 cm.

3.6. Zagadnienia uzupełniające

Wyznaczniki

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

można rozwiązać **metodą wyznacznikową**. Liczbę:

$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem głównym**,

$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej** x,

$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej** y.

1. Jeśli $W \neq 0$, to układ równań ma jedno rozwiązanie wyznaczone za pomocą tzw. **wzorów Cramera**: $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$.
2. Jeśli $W = 0$ i $W_x = 0$, i $W_y = 0$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).
3. Jeśli $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -14$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-4) - 13 \cdot 2 = -70$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 13 - 5 \cdot 11 = -42$$

$W \neq 0$, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y), gdzie:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-70}{-14} = 5 \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{-42}{-14} = 3 \end{cases}$$

1. Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli układ jest oznaczony, to korzystając ze wzorów Cramera, wyznacz jego rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 2x + y = -7 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ -x + \frac{1}{4}y = -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 6y = 12 \\ \frac{1}{6}x + 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 4y = -2 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -4 \end{cases}$

Przykład 2

Określ liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru k.

$$\begin{cases} kx - y = 2 \\ -4x + ky = 4 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - (-1)(-4) = k^2 - 4$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2 \cdot k - (-1) \cdot 4 = 2k + 4$$

$$W_y = \begin{vmatrix} k & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot k - 2 \cdot (-4) = 4k + 8$$

• Dla $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$ wyznacznik $W \neq 0$. Zatem układ równań ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony).

• Dla $k = 2$ wyznacznik $W = 0$, ale $W_x \neq 0$ i $W_y \neq 0$. Zatem układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

• Dla $k = -2$ zachodzą równości $W = 0$, $W_x = 0$ i $W_y = 0$. Zatem układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).

2. Dany jest układ równań z niewiadomymi x, y i parametrem k. Dla jakich wartości parametru k układ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

a) $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ kx - 10y = -5k \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + y = -3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} k^2x - 2y = -4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2ky = 4 \\ 2x + 8y = k \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2kx + y = 1 \\ -4x - ky = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (k+1)x + ky = 2 \\ x + ky = 4 \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $W = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$W_x = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -25$

$W_y = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$

Zatem $x = -5$, $y = 3$.

b) $W = -29$, $W_x = -116$, $W_y = 29$

Zatem $x = 4$, $y = -1$.

c) $W = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$

$W_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$

$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$W = W_x = W_y = 0$, zatem układ jest nieoznaczony.

d) $W = 41$, $W_x = -82$, $W_y = 123$

Zatem $x = -2$, $y = 3$.

e) $W = 0$, $W_x = 48$, $W_y = -4$

Zatem układ jest sprzeczny.

f) $W = -1$, $W_x = -4$, $W_y = -8$

Zatem $x = 4$, $y = 8$.

2. a) $W = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ k & -10 \end{vmatrix} = 10 - 2k$

$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5k & -10 \end{vmatrix} = -50 + 10k$

$W_y = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ k & -5k \end{vmatrix} = 5k - 5k = 0$

$W \neq 0$ dla $k \neq 5$,

$W = W_x = W_y = 0$ dla $k = 5$,

zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq 5$,

– nieoznaczony dla $k = 5$.

2. b) $W = 8 - 4k$, $W_x = 32 - 2k^2$, $W_y = k - 8$, zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq 2$,

– sprzeczny dla $k = 2$.

c) $W = 1 - k^2$, $W_x = 3 + 3k$, $W_y = -3 - 3k$

$W \neq 0$ dla $k \neq -1$ i $k \neq 1$,

$W = W_x = W_y = 0$ dla $k = -1$

$W_x \neq 0$ dla $k = 1$, zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq -1$ i $k \neq 1$,

– nieoznaczony dla $k = -1$,

– sprzeczny dla $k = 1$.

d) $W = -2k^2 + 4$, $W_x = -k - 2$, $W_y = 4k + 4$, zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq -\sqrt{2}$ i $k \neq \sqrt{2}$,

– sprzeczny dla $k \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

e) $W = k^2 - 4$, $W_x = 0$, $W_y = 2k^2 - 8$, zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq -2$ i $k \neq 2$,

– nieoznaczony dla $k \in \{-2, 2\}$.

f) $W = k^2$, $W_x = -2k$, $W_y = 4k + 2$, zatem układ jest:

– oznaczony dla $k \neq 0$,

– sprzeczny dla $k = 0$.

Metoda eliminacji Gaussa

Czasami przy rozwiązywaniu układu równań pomija się w zapisie niewiadome, a współczynniki występujące w równaniach przedstawia się w postaci tablicy zwanej **macierzą** (poniżej macierze zapisano kolorem niebieskim).

Przykład 3

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ -2x + 7y - 6z = 13 \\ 2x - 9y + 3z = -9 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -6 & 13 \\ 2 & -9 & 3 & -9 \end{array}\right]$$

Najpierw eliminujemy niewiadomą x z drugiego i trzeciego równania. W tym celu do drugiego równania dodajemy stronami pierwsze równanie pomnożone przez 2, a do trzeciego dodajemy stronami pierwsze pomnożone przez -2. Otrzymujemy układ równań (zwróć uwagę, że operacjom na równaniach odpowiadają odpowiednie operacje na wierszach macierzy):

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x - 3y + z = -5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Do 2. wiersza macierzy dodano 1. wiersz pomnożony przez 2, do 3. wiersza dodano 1. wiersz pomnożony przez -2.

Następnie eliminujemy niewiadomą y z trzeciego równania. W tym celu do trzeciego równania dodajemy stronami drugie równanie pomnożone przez 3. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x + 0y - 11z = 22 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array}\right]$$

Do 3. wiersza macierzy dodano 2. wiersz pomnożony przez 3.

Z trzeciego równania mamy $z = -2$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Następnie podstawiamy uzyskane wartości y i z do pierwszego równania i otrzymujemy $x = 3$.

Zatem układ spełniony jest przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Przedstawiona powyżej metoda rozwiązywania układu równań nosi nazwę **metody eliminacji Gaussa**.

Przykład 4

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 5y + 6z = -4 \end{cases}$$

Zapisujemy współczynniki występujące w równaniach układu w postaci macierzy:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right]$$

Kolejne wiersze macierzy odpowiadają kolejnym równaniom układu.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -5 \end{array}\right]$$

Od drugiego i trzeciego wiersza macierzy odjęto pierwszy wiersz.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Od trzeciego wiersza macierzy odjęto drugi wiersz pomnożony przez 4.

Z trzeciego równania (reprezentowanego przez trzeci wiersz macierzy) otrzymujemy $z = -1$. Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy $y = 1$. Otrzymane wartości y i z podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy $x = -3$. Zatem układ równań jest spełniony przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ x - 4y + 4z = -1 \\ -2x + y - 5z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ -x + 4y - 6z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y - z = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = 11 \\ 3x - y - 5z = -19 \end{cases}$

3. a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & -3 & 11 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & 36 \end{array}\right]$$

$-18z = 36$, czyli $z = -2$
$-y + 3 \cdot (-2) = -5$, czyli $y = -1$
$x - 3 \cdot (-1) - 2 = 4$, czyli $x = 3$

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -6 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right]$$

$-31z = -31$, czyli $z = 1$
$y + 4 = 6$, czyli $y = 2$
$x + 2 \cdot 2 - 1 = -2$, czyli $x = -5$

c)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & -6 & -7 & -10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 23 & 92 \end{array}\right]$$

$23z = 92$, czyli $z = 4$
$-y - 5 \cdot 4 = -17$, czyli $y = -3$
$x + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 11$, czyli $x = 5$

d)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & -1 & -5 & -19 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -8 & -25 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -22 & -88 \end{array}\right]$$

$-22z = -88$, czyli $z = 4$
$-y + 2 \cdot 4 = 9$, czyli $y = -1$
$x - 2 + 4 = 2$, czyli $x = 0$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0{,}95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1{,}2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0{,}25 \end{cases}$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

a) $\begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

a) $\begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x - 1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 2y = y - 2 \\ 2(y-3x) = 6 - y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, to otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Co to za ułamek?

5. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto, jeśli otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%?

b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 6$, $y = 4$
b) nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}$, $y = 0{,}4x - 1{,}9$
c) $x = 1$, $y = 1$
d) $x = -3$, $y = -2$

2. a) nie; $x = y = 1$
b) tak; $x = \frac{26}{9}$, $y = -\frac{1}{3}$
c) nie; $x = -1{,}1$, $y = -0{,}7$
d) nie; $x = 0$, $y = 1$

3. a), d) nieskończenie wiele
b) 1 **c)** 0

4. a) x – cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności.

$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10y + x - (10x + y) = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

Szukaną liczbą jest 49.

b) x – licznik ułamka, y – mianownik ułamka.

$\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{y+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 \\ y = 17 \end{cases}$

Szukanym ułamkiem jest $\frac{7}{17}$.

5. a) x – masa roztworu 5% [g], y – masa roztworu 40% [g].

$\begin{cases} x + y = 1400 \\ 0{,}05x + 0{,}4y = 0{,}3 \cdot 1400 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 400 \\ y = 1000 \end{cases}$

Zmieszano 400 g roztworu 5% i 1000 g roztworu 40%.

b) x – masa roztworu 6% [g], y – masa roztworu 10% [g].

$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0{,}06x + 0{,}1y = 0{,}09 \cdot 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2{,}5 \\ y = 7{,}5 \end{cases}$

Powinien zmieszać 2,5 g roztworu 6% i 7,5 g roztworu 10%.

Zestaw II

1. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla $m = 1$, a ile – dla $m = -2$.

a) $\begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości parametrów m i k para liczb: $x = 3$, $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań?

a) $\begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k-1)x - 2my = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1-m)x + 4ky = 10 \\ (m-2k)x - (4k+m)y = -8 \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0{,}25 \\ (x-1)^2 = (2-x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x-1)(1+3x) + y = (1-3x)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (y+2)^2 = y^2 + x \\ (2x-1)^2 = 4x^2 - y \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x-y)(x+y) = x^2 - (y-1)^2 \\ (x+y)(x+2) - xy = x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (3x-1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1-2y)^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-8)^2 = (x+8)(x+8) + y \\ x(y-1) = y(x-2) \end{cases}$

4. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb ujemnych?

a) $\begin{cases} x - y = 1 - m \\ x - 2y = m - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 2m - 6 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 3 - m \end{cases}$

5. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb o przeciwnych znakach?

a) $\begin{cases} 2x - y = m \\ 5x - 3y = 2m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = m - 3 \\ 3x - y = 2 - m \end{cases}$

***6.** Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru $m \in \{-1, 1, 2\}$.

a) $\begin{cases} mx + 3y = 4 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -8x + 6y = m \\ mx - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + my = 1 \\ x + 2y = m \end{cases}$

***7.** Dla jakiej wartości parametru m układ jest nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

a) $\begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x + 5y = 8 \\ 2x - 2{,}5y = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 4x + my = -14 \end{cases}$

---

1. a) $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nie ma rozwiązań
b) $m = 1$: nieskończenie wiele rozwiązań, $m = -2$: jedno rozwiązanie
c) $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nieskończenie wiele rozwiązań

2. a) $m = \frac{11}{17}$, $k = \frac{26}{17}$
b) $m = -1$, $k = \frac{1}{2}$

3. a) $x = \frac{3}{2}$, $y = 6$
b) $x = 0$, $y = -1$
c) $x = \frac{3}{22}$, $y = \frac{2}{11}$
d) $x = 1$, $y = -4$
e) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
f) $x = 0$, $y = 0$

4. a) $\begin{cases} x = -3m + 5 \\ y = -2m + 4 \end{cases}$
$-3m + 5 < 0$ i $-2m + 4 < 0$, czyli dla $m > 2$.
b) $\begin{cases} x = 3 - m \\ y = 4 - \frac{4}{3}m \end{cases}$
$3 - m < 0$ i $4 - \frac{4}{3}m < 0$, czyli dla $m > 3$.

5. a) $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = m - 2 \end{cases}$
Rozpatrujemy dwa przypadki, w których zmienne x i y mają różne znaki:
1) $m - 1 > 0$ i $m - 2 < 0$, wówczas $m \in (1; 2)$
2) $m - 1 < 0$ i $m - 2 > 0$, wówczas $m \in \emptyset$
Zatem $m \in (1; 2)$.
b) $\begin{cases} x = \frac{m-5}{9} \\ y = \frac{4m-11}{3} \end{cases}$
Rozpatrujemy dwa przypadki, w których zmienne x i y mają różne znaki:
1) $\frac{m-5}{9} > 0$ i $\frac{4m-11}{3} < 0$, wówczas $m \in \emptyset$
2) $\frac{m-5}{9} < 0$ i $\frac{4m-11}{3} > 0$, wówczas $m \in \left(\frac{11}{4}; 5\right)$
Zatem $m \in \left(\frac{11}{4}; 5\right)$.

6. a) nieskończenie wiele dla $m = -1$, 1 dla $m \in \{1, 2\}$
b) 0 dla $m = 2$, 1 dla $m \in \{-1, 1\}$
c) 0 dla $m = 1$, 1 dla $m \in \{-1, 2\}$

7. a) nieoznaczony dla $m = 5$, sprzeczny dla $m \neq 5$
b) nieoznaczony dla $m = -4$, sprzeczny dla $m \neq -4$
c) nieoznaczony dla $m = -2$, sprzeczny dla $m \neq -2$

Rozwiązując zadania tekstowe, możemy spotkać się z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak nie zawsze musimy wtedy wykorzystywać układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach α, β, γ, przy czym suma miar kątów α i β jest równa 105°. Wyznacz te kąty, jeśli spełniona jest równość $\alpha+2\beta+3\gamma=400^\circ$.

• Rozwiązanie tego zadania możemy rozpocząć od zauważenia, że mamy trzy niewiadome: α, β, γ. Prowadzi to jednak do układu trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=180^\circ \\ \alpha+\beta=105^\circ \\ \alpha+2\beta+3\gamma=400^\circ \end{cases}$$

• Jeśli zauważymy, że $\alpha=105^\circ-\beta$, możemy napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ-\beta)+2\beta+3\gamma=400^\circ \\ (105^\circ-\beta)+\beta+\gamma=180^\circ \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy $\beta=70^\circ$, $\gamma=75^\circ$.
Zatem $\alpha=105^\circ-\beta=35^\circ$. Sprawdzenie: $35^\circ+70^\circ+75^\circ=180^\circ$, $35^\circ+70^\circ=105^\circ$, $35^\circ+2\cdot70^\circ+3\cdot75^\circ=400^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha=35^\circ$, $\beta=70^\circ$, $\gamma=75^\circ$

Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Monet 5--złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce, jeśli jest w niej 48 zł.

• Zadanie możemy rozwiązać, wprowadzając trzy niewiadome:
x – liczba monet 1-złotowych,
y – liczba monet 2-złotowych,
z – liczba monet 5-złotowych.
Następnie należy ułożyć i rozwiązać układ trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ z=x-2 \\ x+2y+5z=48 \end{cases}$$

• Zauważmy, że możemy tu wprowadzić dwie niewiadome: x – liczba monet 1-złotowych, y – liczba monet 2-złotowych. Wówczas monet 5-złotowych jest $x-2$. Otrzymujemy teraz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x+y+(x-2)=18 \\ x+2y+5(x-2)=48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest: $x=9$ oraz $y=2$ (sprawdź, czy spełnia ono warunki zadania).

Odpowiedź: W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.

2. $\begin{cases} x = \frac{m-5}{m+2} \\ y = \frac{2-6m}{m+2} \end{cases}$

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Wskaż rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

2. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$ jest para liczb ujemnych dla:

A. $m = -\frac{5}{2}$, **B.** $m = -\frac{1}{2}$, **C.** $m = \frac{1}{3}$, **D.** $m = \frac{3}{2}$.

3. Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi $\frac{2}{3}$ wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację? Przyjmij oznaczenia k – wiek Kuby, m – wiek Magdy.

A. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$

4. Wskaż równanie, które należy dopisać do równania $3x - 4y = 6$, aby otrzymać nieoznaczony układ równań.

A. $3x - 4y = -6$ **C.** $\frac{3}{2}x - 2y = -3$
B. $-3x + 4y = 6$ **D.** $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$

5. Wskaż układ równań równoważny układowi $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

A. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$

6. Układ równań $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym dla:

A. $m = -\frac{1}{2}$, **B.** $m = -1$, **C.** $m = 1$, **D.** $m = \frac{1}{2}$.

6. $\begin{cases} 4m^2x - 6y = 10 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$

Układ jest nieoznaczony, gdy $4m^2 = 4$ i $10 = -10m$, czyli dla $m = -1$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{-x-5}{2} = x - y \\ 5 - 2(x - 3(y-1)) = 0 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Ile było banknotów każdego rodzaju, jeśli banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych?

Zadanie 3 (2 pkt)

Różnica miar kątów α i β pewnego trójkąta wynosi 30°. Kąt γ tego trójkąta ma miarę o 20° większą od sumy miar kątów α i β. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 4 (2 pkt)

Para liczb $x = 2$, $y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

I. $x - 2y = -4$ II. $2x + 3y = 15$ III. $2x - 3y = -5$ IV. $3x - y = 2$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat co obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

Zadanie 6 (3 pkt)

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Suma pieniędzy w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

Zadanie 7 (3 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4(x+y)^2 - 4y(2x+y) = (2x)^2 + x + y \\ (x-1)(y+1) = (x+2)(y-2) \end{cases}$

1. $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$

2. x – liczba banknotów 10-złotowych,
y – liczba banknotów 20-złotowych.

$\begin{cases} 10x + 50x + 20y = 940 \\ y = x + 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 \\ y = 17 \end{cases}$

Było 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych i 10 banknotów 50-złotowych.

3. Zauważmy, że $\alpha = \beta + 30^\circ$, wówczas:

$\begin{cases} (\beta + 30^\circ) + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma - 20^\circ = (\beta + 30^\circ) + \beta \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 25^\circ \\ \gamma = 100^\circ \end{cases}$

$\alpha = 55^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

4. I i III

5. x – obecny wiek Kasi,
y – obecny wiek brata Kasia.

$\begin{cases} x - 4 + 2(y - 4) = 22 \\ x + 2 = 2(y + 2) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 18 \\ y = 8 \end{cases}$

Bracia Kasi będą pełnoletni za 10 lat, wówczas Kasia będzie miała 28 lat.

6. x – liczba monet 10-groszowych,
y – liczba monet 2 złotowych, stąd:
x – liczba monet 50-groszowych,
$2y$ – liczba monet 1 złotowych.

$\begin{cases} 5 \cdot 3 + 2 \cdot y + 1 \cdot 2y + 0{,}1 \cdot x + 0{,}5 \cdot x = 42 \\ 3 + y + 2y + x + x = 31 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$

Jest po 5 monet 10- i 50-groszowych, 12 monet 1-złotowych i 6 monet 2-złotowych.

7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dwaj rowerzyści wyruszyli w tę samą trasę: pierwszy o 10.00, drugi godzinę później. O godzinie 14.00 drugi rowerzysta dogonił pierwszego. Oblicz prędkości obu rowerzystów, jeśli drugi jechał się ze średnią prędkością o 5 km/h większą niż pierwszy. Niech v oznacza prędkość wolniejszego rowerzysty w metrach na sekundę. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby v.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wyznacz liczby x i y spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y - x(2x+1) = -2(x-1)^2 + 3 \\ (y+1)^2 + 2x = y(y+1) + 5 \end{cases}$$

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego iloczynu xy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego sumy liczb x i y, które tworzą parę będącą rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 4\sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

Zadanie 4 (4 pkt)

Michał uczestniczył w dwudniowym zgrupowaniu zawodników klubu kajakarskiego. Pierwszego dnia płynął kajakiem 3 godziny z prądem rzeki oraz tyle samo czasu pod prąd i pokonał łącznie 24 km. Drugiego dnia płynął kajakiem 2 godziny z prądem rzeki i 4 godziny pod prąd, pokonując łącznie 21 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

D **Zadanie 5 (3 pkt)**

Uzasadnij, że punkt $P(x, y)$, którego współrzędne spełniają podany układ równań, należy do prostokąta o wierzchołkach: $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,6)$, $D(1,6)$.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-x)(y+x) = y(y-1) \\ x + y - \frac{x-y}{2} = \frac{x+2y}{2} + 2 \end{cases}$$

D **Zadanie 6 (4 pkt)**

Wykaż, że $m = -5$ jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 2m + 1 \\ 3x - 2y = 2m - 3 \end{cases}$$

jest spełniony przez parę liczb ujemnych.

Odpowiedzi do zadań

1. Zauważmy, że

$5\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \cdot \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{25}{18}\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

4 h = 14400 s, 3 h = 10800 s.

Niech s oznacza drogę w metrach, wówczas:

$$\begin{cases} s = v \cdot 14400 \\ s = \left(v + \frac{25}{18}\right) \cdot 10800 \end{cases}$$

$v = \frac{25}{6} = 4{,}1(6)$ [m/s]

Należy zakodować: 416

2. $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{22}{7} \end{cases}$$

$xy = \frac{66}{49} \approx 1{,}347$

Należy zakodować: 134

3. $\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

$x + y = \frac{10+2\sqrt{2}}{3} \approx 4{,}276$

Należy zakodować: 427

4. v – prędkość własna kajaka [km/h],
v_p – prędkość prądu rzeki [km/h].

Wzór na prędkość przekształcamy do postaci:

droga = czas · prędkość

$$\begin{cases} 24 = 3(v + v_p) + 3(v - v_p) \\ 21 = 2(v + v_p) + 4(v - v_p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 4 \\ v_p = 1{,}5 \end{cases}$$

Prędkość prądu rzeki wynosiła 1,5 km/h.

5. Punkt $P(x, y)$ należy do prostokąta $ABCD$, jeżeli $x \in (1;3)$ i $y \in (1;6)$.

Przekształcamy układ równań do postaci:

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 2 \in (1;3) \\ y = 4 \in (1;6) \end{cases}$$

Zatem punkt $P(x, y)$ należy do prostokąta $ABCD$.

6. Wyznaczamy zmienne x i y w zależności od parametru m:

$$\begin{cases} x = 2m + 5 \\ y = 2m + 9 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych, jeżeli: $2m+5 < 0$ i $2m + 9 < 0$, czyli $m < -4{,}5$.
Zatem $m = -5$ jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań jest spełniony przez parę liczb ujemnych.